

DD-107

December-2018

B.Sc., Sem.-I

**101 : Mathematics
(Calculus & Matrix Algebra)**

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70]

- સૂચના:** (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ ચાર પ્રશ્નોંને
 (2) ગમણી ભાગના અંદરને -તે પ્રશ્ન/પેટા પ્રશ્નના ગુણા દર્શાવિ છે.

- I. (A) (1) એની $y = e^{ax} \sin(bx + c)$; $a \neq 0, b \neq 0, c$ - અયણ સંખ્યા હોથ તો સાબિત કરો કે

7

$$y_n = r^n e^{ax} \sin(bx + c + n\phi) \text{ એની } a = r \cos \phi, b = r \sin \phi.$$

- (2) એની $y = \sin(m \cos^{-1} x)$; $x \in [-1, 1]$ [હોથ તો સાબિત કરો કે

7

$$(1 - x^2)y_{n-2} - (2n+1)x y_{n-1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$$

અથવા

- (1) અનંત વાસ્તવિક ઘનત્વદોવાળી શ્રેઢી માટે એ એલાઈની ગુણોત્તર કસ્પેટી લાભો અને સાબિત કરો.

7

- (2) શ્રેઢીના અભિસારીતા ચર્ચો:

7

$$(i) \sum (-1)^n [\sqrt{n} - \sqrt{n-1}]$$

$$(ii) \sum \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

- (B) રૂક્માં જવાબ આપો : (ગમે તે ચાર)

4

- (1) એની $y = (2x + 3)^5$ હોથ તો $y_5(1)$ શોધો.

- (2) એની $y = \frac{1}{\cosec x}$ હોથ તો y_n શોધો.

- (3) લાયબ્નિઝનું પ્રમેય લાભો.

- (4) એકાન્ત? શ્રેઢી અભિસારી ક્યારે કહેવાય?

- (5) π^n કિંમત માટે શ્રેઢી $\sum \frac{1}{n^n}$ ની અભિસારી થાય?

- (6) ધાત શ્રેઢી $\sum \frac{x^n}{n!}$ ની અભિસાર ત્રિજ્યા મેળવો.

P.T.O.

7

2. (A) (1) કોશીનું મધ્યકગાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(2) $x > 0$ માટે સાબિત કરો કે $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$ આ પરતી બતાવો કે π ની કિંમત $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

અને $3\sqrt{3}$ ની વચ્ચે આવેલી છે.

અથવા

- (1) મેક્લોરીનનું પ્રમેય લખો અને $f(x) = \cos x : x \in \mathbb{R}$ નું જા ધાતમાં વિસ્તરણ મેળવો.

- (2) લક્ષ મેળવો :

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\log x} - \frac{x}{x-1} \right], x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\cot^2 x}$

- (B) ટૂંકમાં જવાબ આપો : (શામેસે ચાર)

4

- (1) અનિશ્ચિત સ્વરૂપ એટલે શું ?

(2) લક્ષ મેળવો : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 4^x}{x}$

- (3) લાન્ગ્રાજનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો.

- (4) બતાવો કે $f(x) = x^5 + 1, x \in \mathbb{R}$ માટે વધતું વિધેય છે.

- (5) વિધેય $(1+x)^m$ નું વિસ્તરણ જા પદમાં લખો.

- (6) વિધેય $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ માટે રોલનું મધ્યકમાન પ્રમેય પ્રયોજુ શકાય કે કેમ?

3. (A) (1) વ્યાખ્યા આપો : શ્રેણીકોનો ગુણાકાર. જો A એ $m \times n$ કક્ષાનો અને B એ $n \times p$ કક્ષાનો શ્રેણીક હોય તો સાબિત કરો કે $(AB)^T = B^T A^T$.

7

(2) (i) શ્રેણીક $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -7 & -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ નો કોટિ શોધો.

(ii) શ્રેણીક $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & i & 4-2i \end{bmatrix}$ માટે ચકાસો કે $A^* = \overline{(A^T)}$

અથવા

7

(1) વ્યાખ્યા આપો : સહઅવયવજ શ્રેણીક, જો A એ n-કક્ષાનો ચોરસ શ્રેણીક હોય તો સાંભિત કરોકે $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n$. 7

(2) (i) શ્રેણીક A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ માટે A^{-1} મેળવો. 7

(ii) શ્રેણીક A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ ને સંમિત અને વિ-સંમિત શ્રેણીકોના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો.

(B) ટ્રૂકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે નણા) 3

(1) નિઝ ત્રિકોણીય શ્રેણીકની વ્યાખ્યા ઉદાહરણ સહિત આપો.

(2) જો A = $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ વિ-સંમિત શ્રેણીક હોય તો x નું મૂલ્ય મેળવો. 7

(3) ચોરસ શ્રેણીક A નો વ્યસ્ત શ્રેણીક અસ્તિત્વ ધરાવે તે માટેની શરૂતં કહુંાવો.

(4) જો A સંમિત શ્રેણીક હોય તો A + A^T સંમિત કે વિ-સંમિત શ્રેણીક છે ? 7

(5) શ્રેણીક A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ માટે A^{-1} મેળવો. 7

4. (A) (i) જો λ ($\lambda \neq 0$) એ વ્યસ્ત સંપત્ર શ્રેણીક $A = [a_{ij}]_n$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય હોય તો બતાવોકે 7

(i) $\frac{1}{\lambda}$ એ A^{-1} નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

(ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ એ $\text{adj } A$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

(2) (i) શ્રેણીક A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો મેળવો તથા કોઈપણ એક લાક્ષણિક મૂલ્યને અનુરૂપ લાક્ષણિક સદીશ શોધો. 7

(ii) નીચે આપેલ સમીકરણ સંહતિની સુસંગતા ચકાસો.

$$x + 2y + z = 2, 2x + 4y + 3z = 3, 3x + 6y + 5z = 4.$$

અધ્યવા

(1) કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય લખો તથા શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ માટે કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય
ચકાસો.

7

(2) (i) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ માટે શ્રેણિક બહુપદી,

$$A^6 - 3A^5 + 2A^4 - 2A^3 + 5A^2 - 3A + 1$$

7

(ii) આપેલાં સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ કેમરની રીતે મેળવો.

$$x + y + z = 6, 2x - y + z = 3, x + 3y - z = 4$$

(B) ટૂંકમાં જવાબ આપો. (ગમે તે ત્રણ)

3

- (1) ચોરસ શ્રેણિક A નું લાક્ષણિક સમીકરણ લખો.
- (2) કોઈપણ વિકારી શ્રેણિકના લાક્ષણિક મૂલ્યો લખો.
- (3) જો ચોરસ શ્રેણિક A નું લાક્ષણિક મૂલ્ય -2 હોય તો A^2 અને A^3 ના લાક્ષણિક મૂલ્ય ક્યા છે?
- (4) સુરેખ સમીકરણ સંહતિ માટે અનંત ઉકેલ ક્યારે મળો?
- (5) વ્યાપ્યા આપો : સુસંગત સંહતિ.

DD-107

December-2018

B.Sc., Sem.-I**101 : Mathematics
(Calculus & Matrix Algebra)****Time : 2:30 Hours]****|Max. Marks : 70**

- Instructions :** (1) There are four questions.
 (2) Figure to the right indicate full marks of the question/sub question.

1. (A) (1) If $y = e^{ax} \sin(bx + c)$; $a \neq 0, b \neq 0, c$ - constants then prove that 7
 $y_n = r^n e^{ax} \sin(bx + c + n\phi)$ where $a = r \cos \phi, b = r \sin \phi$.
- (2) If $y = \sin(m \cos^{-1} x)$; $x \in [-1, 1]$ then prove that 7
 $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)x y_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$.
- OR**
- (1) State and prove De'Alembert ratio test for the infinite positive series. 7
 (2) Discuss the convergence of the following series : GujaratStudy.com 7
- (i) $\sum (-1)^n [\sqrt{n} - \sqrt{n-1}]$
 (ii) $\sum \frac{x^n}{n^2 + 1}$
- (B) Give answer in short : (Any four) 4
- (1) If $y = (2x + 3)^4$ then find $y_5(1)$.
 (2) If $y = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$ then find y_n .
 (3) State Leibnitz's theorem.
 (4) When alternative series is convergent?
 (5) For which value of p , $\sum \frac{1}{n^p}$ is convergent?
 (6) Find the radius of convergence of the power series $\sum \frac{x^n}{n!}$.

7

2. (A) (1) State and prove Cauchy's mean value theorem.

- (2) $x > 0$ prove that $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$ and hence show that π lies between $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ and $3\sqrt{3}$.

7

OR

- (1) State Maclaurin's theorem. Also obtain expansion of $f(x) = \cos x : x \in \mathbb{R}$ in the powers of x .

- (2) Evaluate Limit :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\log x} - \frac{x}{x-1} \right], x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\cot^2 x}$$

7

7

- (B) Give answer in short : (Any four)

4

- (1) What do you mean by In-determinant form?

$$(2) \text{Evaluate: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 4^x}{x}$$

- (3) State Lagrange's mean value theorem.

- (4) Show that the function $f(x) = x^5 + 1, x \in \mathbb{R}$ is increasing.

- (5) Write the expansion for $(1+x)^m$ in terms of x .

- (6) Can we apply Rolle's Theorem for function $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$?

3. (A) (1) Define : Multiplication of matrices. For matrix A of order $m \times n$ and matrix B of order $n \times p$, prove that $(AB)^T = B^T A^T$.

7

- (2) (i) Find the rank of matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -7 & -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

7

- (ii) Verify $A^* = \overline{(A^T)}$ for a matrix $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & i & 4-2i \end{bmatrix}$.

OR

6

- (1) Define : Adjoint matrix. For a square matrix A of order n, prove that
 $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n$

(2) (i) Find A^{-1} of a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(ii) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ as a sum of symmetric and skew-symmetric matrix.

- (B) Give answer in short : (Any three)

- (1) Define : Lower triangular matrix with illustration.

- (2) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ is skew-symmetric matrix, then find the value of x.

- (3) Write the condition for the existence of inverse of a square matrix.

- (4) If A is symmetric matrix then, $A + A^T$ – a symmetric or skew-symmetric matrix ?

- (5) Find A^{-1} for a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

4. (A) (1) If λ ($\lambda \neq 0$) is an Eigen value of an invertible matrix $A = [a_{ij}]_n$, then show that

- (i) $\frac{1}{\lambda}$ is the Eigen value of A^{-1} .

- (ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ is the Eigen value of $\text{adj } A$.

- (2) (i) Find the Eigen values and Eigen vector corresponding to any one Eigen

value of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- (ii) Discuss the consistency of the following system of equations :

$x + 2y + z = 2, 2x + 4y + 3z = 3, 3x + 6y + 5z = 4.$

OR

(A) (1) State Cayley-Hamilton theorem. Also verify Cayley-Hamilton theorem

for a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(2) (i) For a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ find a matrix represented by the matrix polynomial $A^6 - 3A^5 + 2A^4 - 2A^3 + 5A^2 - 3A + I$.

(ii) Solve the following system of equations by Crammer's rule :

$$x + y + z = 6, 2x - y + z = 3, x + 3y - z = 4$$

(B) Give answer in short : (Any three)

- (1) Write down the characteristic equation of a square matrix A.
- (2) Write the Eigen values of any diagonal matrix.
- (3) If an Eigen value of a square matrix A is '-2', what will be Eigen values of A^2 and A^3 ?
- (4) For a system of linear equations, when infinite solution exist ?
- (5) Define : Consistent system.