

DD-103

December-2018

B.Sc., Sem.-III

CC-201 : Mathematics
(Advanced Calculus – I)

Time : 2:30 Hours]

[Max. Marks : 70

સૂચના : (1) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.

(2) સર્વત્ર સંકેતો પ્રચલિત છે.

(3) જમણી તરફના અંકો પ્રશ્નો/પેટા પ્રશ્નોના ગુણ દર્શાવે છે.

1. (A) (i) દ્વિચલ વિધેયના લક્ષની વ્યાખ્યા આપો અને વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી લક્ષ

7

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{x^2 + y^2}{xy} \text{ મેળવો.}$$

(ii) આપેલ વિધેયોનું આપેલ બિંદુ પાસે સાતત્ય ચર્ચો.

7

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x + y} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ બિંદુ } (0, 0) \text{ પાસે.}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{જો } x \neq 0 \\ 0 & \text{જો } x = 0 \end{cases} \text{ બિંદુ } (0, 1) \text{ પાસે.}$$

અથવા

(i) પુનરાવર્તિત લક્ષની વ્યાખ્યા આપો. આપેલ વિધેયનું પુનરાવર્તિત લક્ષ $(0, 0)$ બિંદુ પાસે મેળવો.

7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(ii) આપેલ લક્ષ જો અસ્તિત્વ ધરાવે તો લક્ષ મેળવો.

7

(1) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ જ્યાં

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^1 + y^1}{x^2 + y^2} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ જ્યાં

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x + y)}{x + y} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(B) નીચેનામાંથી કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

4

(1) શું આપેલ વિધેયો $f(x, y) = xy + 2$ અને $f(x, y) = \frac{2x}{2x-y}$ બિંદુ $(1, 2)$ પાસે સતત છે ?

(2) $a \in \mathbb{R}^n$ ના લંબચોરસ પડોશીગણની વ્યાખ્યા આપો.

(3) એવા એક દ્વિચલ વિધેયનું ઉદાહરણ આપો જે બિંદુ $(1, 1)$ પાસે સતત ના હોય.

2. (A) (i) યંગનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

7

(ii) આપેલ વિધેય f માટે $f_{xx}(0, 0)$, $f_{yy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$ અને $f_{xy}(0, 0)$ ન્યાં

7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

અથવા

(i) ચાર્લ્સનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

7

(ii) આપેલ વિધેયો વિકલનીય છે તે ચકાસો.

7

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^3} & \text{જો } (x, y) \neq (0, 0) \text{ બિંદુ } (0, 0) \text{ પાસે.} \\ 0 & \text{જો } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ બિંદુ } (0, 0) \text{ પાસે.}$$

(B) નીચેનામાંથી કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

4

(1) વિધેય $f(x)$ ના દિક વિકલનની વ્યાખ્યા આપો.

(2) હાર્મોનિક વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.

(3) જો $u = e^{xy}$, તો $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ શોધો.

3. (A) (i) જેમના દ્વિતીય આંશિક વિકલીતો અસ્તિત્વ ધરાવે તેવા m ધાતીય સમપરિમાણીય વિધેય $H = f(x, y)$ નું વિધેય $u = \phi(H)$ હોય તો સાબિત કરો કે. 7

$$(1) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = m \frac{F(u)}{F'(u)} F'(u) (\neq 0) = G(u) \text{ (સન્ય).}$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u) (G'(u) - 1).$$

જ્યાં $H = f(x, y) = F(u)$.

- (ii) (1) જો $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy}$, તો સાબિત કરો કે 7

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- (2) વિધેય $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ માટે સ્થાનીય સ્થિર મૂલ્યો શોધો.

અથવા

- (i) સમપરિમાણીય વિધેય માટેનો યુલરનો પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

- (ii) જો $u = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$, હોય, તો સાબિત કરો કે $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ 7

- (B) નીચેનામાંથી કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો : 3

- (1) સમપરિમાણીય વિધેયની વ્યાખ્યા આપી એક ઉદાહરણ આપો.

- (2) આપેલ સમપરિમાણીય વિધેય $z = \frac{x^{2/3} + x^{7/2} y^{7/2}}{x^5 + y^5}$ ની ઘાત શોધો.

- (3) $x^2 y^2$ નું સ્થાનીય સ્થિર મૂલ્ય $x - y = 1$ શરત નીચે શોધો.

4. (A) (i) વક્ર $r = f(\theta)$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા ધ્રુવીય સ્વરૂપે શોધો.
(ii) દ્વિચલ વિધેય માટેનો ટેઈલરનો પ્રમેય લાખો અને સાબિત કરો.

અથવા

- (i) (1) વિધેય $f(x, y) = e^{ax} \sin by$ નું x અને y ની ધાતમાં વિસ્તરણ કરો.
(2) વક્ર $x^2 + y^2 = a^2$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો.
(ii) વક્ર $r = a(1 - \cos \theta)$ ની વક્રતા ત્રિજ્યા શોધો.

(B) નીચેનામાંથી કોઈપણ બેના ટૂંકમાં જવાબ આપો :

- (1) બહુવિધ બિંદુ અને દિક બિંદુની વ્યાખ્યા આપો.
(2) જો આપેલ દિક બિંદુ નિશ્ચિત હોય તો r , s અને t વચ્ચે શું સંબંધ હોય ?
(3) કો-જ્યુગેટ બિંદુની વ્યાખ્યા આપો.

DD-103

December-2018

B.Sc., Sem.-III

CC-201 : Mathematics
(Advanced Calculus - I)

[Max. Marks : 70]

Time : 2:30 Hours

- Instructions :** (1) All the questions are compulsory.
 (2) Notations are usual, everywhere.
 (3) Figures to the right indicate marks of the question/sub-question.

I. (A) (i) Define limit of function of two variables. Use the definition to find 7

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

(ii) Discuss the continuity of following functions at given point. 7

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x + y} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ at point } (0, 0)$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \text{ at point } (0, 1)$$

(i) Define iterated limit. Find the iterated limit for 7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ at point } (0, 0)$$

(ii) Evaluate the following limit if exists. 7

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ where

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ where

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(B) Attempt any two :

4

- (1) Is the function $f(x, y) = xy + 2$ & $f(x, y) = \frac{2x}{2x - y}$ continuous at point $(1, 2)$.
- (2) Define rectangular nbhd of $a \in \mathbb{R}^n$.
- (3) Give one example of function of two variables which is discontinuous at point $(1, 1)$.

2. (A) (i) State and prove Young's theorem.

7

(ii) Find $f_{xx}(0, 0)$, $f_{yy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$ and $f_{xy}(0, 0)$ for the function

7

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

OR

(i) State and prove Schartz's theorem.

7

(ii) Discuss the differentiability of the following functions :

7

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^3} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ at point } (0, 0)$$

$$(2) f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ at point } (0, 0)$$

(B) Attempt any two :

4

- (1) Define directional derivative of function $f(x)$.
- (2) Define harmonic function.
- (3) If $u = e^{xy}$, then find $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

3. (A) (i) If $u = \phi(H)$ is function of a homogeneous function $H = f(x, y)$ of degree m whose partial derivatives of second order exists, then 7

$$(1) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = m \frac{F(u)}{F'(u)} F'(u) (\neq 0) = G(u) \text{ (say).}$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(u) (G'(u) - 1).$$

Where $H = f(x, y) = F(u)$.

- (ii) (1) If $f(x, y) = \sqrt{x^2 - xy}$, then prove that 7

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- (2) Find the extreme values of $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

OR

- (i) State and prove Euler's theorem for homogeneous function. 7

- (ii) If $u = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$, then prove that $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. 7

- (B) Attempt any two :

- (1) Define homogeneous function with one example. GujaratStudy.com

- (2) Find the degree of the homogeneous function $z = \frac{x^{2/3} + x^{7/2} y^{7/2}}{x^5 + y^5}$.

- (3) Find the extreme value of $x^2 y^2$ under condition that $x - y = 1$.

4. (A) (i) Find the radius of curvature of a curve $r = f(\theta)$ i.e. in polar equations. 7

- (ii) State and prove Taylor's Theorem for the function of two variables. 7

OR

(i) (1) Expand $f(x, y) = e^{ax} \sin by$ in the power of x and y . 7

(2) Find the radius of curvature of a curve $x^2 + y^2 = a^2$.

(ii) Find the radius of curvature of curve $r = a(1 - \cos \theta)$. 7

(B) Attempt any two : 3

(1) Define multiple point and double point.

(2) If double point is Cusp, then what is the relation between r , s and t .

(3) Define conjugate point.
